

Modelización no lineal del PIB de España¹

Resumen

En este trabajo se caracteriza la dinámica cíclica del PIB de España mediante un modelo no lineal de series temporales. El modelo consiste en una autorregresión con régimen cambiante (Markov-Switching Autoregression, MS-AR) que considera que el régimen subyacente del ciclo puede ser representado mediante una variable de estado binaria cuya evolución es caracterizada de forma explícita mediante una cadena de Markov. Esta variable de estado condiciona los parámetros de un modelo lineal que completa la caracterización de la dinámica observada. A modo de contraste se utiliza un modelo autorregresivo por umbrales (Threshold Autoregression, TAR). Ambos modelos cualifican y complementan las previsiones a corto plazo derivadas de modelos factoriales dinámicos.

Escrito por Ángel Cuevas[†] y Enrique M. Quilis[†]
Revisado por Carlos Cuerpo y Rafael Frutos
Aprobado por Carlos Cuerpo

Palabras Clave: Modelos de series temporales, Modelos no lineales, Modelos autorregresivos con cambio de régimen, Modelos autorregresivos por umbrales, Puntos de giro, PIB.

JEL Codes: C22, C32, C51, C53.

[†] Autoridad Independiente de Responsabilidad Fiscal

¹ Agradecemos los comentarios y sugerencias de Ana Abad, Carlos Cuerpo, José Luis Escrivá y Rafael Frutos.

La Autoridad Independiente de Responsabilidad Fiscal (AIReF) nace con la misión de velar por el estricto cumplimiento de los principios de estabilidad presupuestaria y sostenibilidad financiera recogidos en el artículo 135 de la Constitución Española.

Contacto AIReF: C/José Abascal, 2, 2º planta. 28003 Madrid. Tel. +34 910 100 895
Email: Info@airef.es. Web: www.airef.es

Este documento no refleja necesariamente la posición de la AIReF sobre las materias que contiene. La documentación puede ser utilizada y reproducida en parte o en su integridad citando su procedencia.



Contenido

1	Introducción.....	3
2	Análisis del ciclo mediante modelos autorregresivos (MS-AR) con cambio de régimen.....	4
3	Aplicación: un modelo MS-AR para el PIB de España.....	6
4	Un contraste: un modelo Autorregresivo por umbrales (TAR) para el PIB de España	12
5	Conclusiones	17
	Referencias.....	17

1 Introducción

La alternancia de fases expansivas y recesivas que caracteriza la evolución de las economías de mercado es uno de sus rasgos más notables. Dentro de esta alternancia, conocida como “ciclo económico”, destacan los puntos de giro: observaciones en las que el estado cíclico pasa de la expansión a la recesión (máximos, *peaks*) o viceversa (mínimos, *troughs*). La identificación histórica (o fechada) de los puntos de giro es esencial para una adecuada cuantificación y análisis del ciclo¹. Este interés es especialmente relevante en el contexto económico de los últimos años, caracterizado por una de las recesiones más intensas de la historia moderna.

En este trabajo se utiliza un enfoque que representa la dinámica cíclica mediante modelos no lineales. Uno de los más habituales es la autorregresión con régimen cambiante (*Markov-switching autoregression*, MS-AR) que considera que el estado del ciclo puede ser representado mediante una variable de estado binaria cuya evolución es caracterizada de forma explícita mediante una cadena de Markov. Esta variable de estado condiciona los parámetros de un modelo lineal que completa la representación de la dinámica observada.

Este planteamiento, basado en modelos explícitos para la serie objeto de análisis, ofrece la posibilidad de cuantificar tanto la incertidumbre que rodea el proceso de identificación de los puntos de giro como su dinámica interna.

La estructura del documento es la siguiente. La sección segunda describe de forma sumaria los modelos autorregresivos con régimen cambiante, MS-AR. Este modelo es estimado utilizando la serie del PIB trimestral de España en la tercera sección. Como contraste, en la cuarta sección se especifica y estima un modelo no lineal alternativo

¹ Este sería el caso del enfoque clásico del *National Bureau of Economic Research (NBER)*, centrado en la datación empírica de las distintas fases del ciclo.

(*Threshold Autoregressions*, TAR) con el fin de examinar la robustez de los resultados obtenidos.

2 Análisis del ciclo mediante modelos autorregresivos con cambio de régimen

El análisis de los puntos de giro basado en modelos estadísticos explícitos para una serie económica considera que dichos puntos son un elemento intrínseco en el funcionamiento habitual de la serie, esto es, que su propia dinámica interna genera unas observaciones especiales que permiten identificar intervalos diferenciados en su evolución. En consecuencia, los puntos de giro son observaciones que señalan la transición de la serie de un régimen a otro. Usualmente se asumen dos regímenes: 0 (recesión) y 1 (expansión)², quedando definidos los puntos de giro como el paso del primero al segundo (mínimo cíclico) o viceversa (máximo cíclico).

La mayor parte de los modelos que se usan en el análisis del ciclo desde una perspectiva explícita son de tipo no lineal. En particular, uno de los más utilizados son las autorregresiones con régimen cambiante Markoviano (*Markov Switching Autoregression*, MS-AR). A continuación se exponen brevemente sus principales características y una aplicación a la serie del PIB trimestral de España. Detalles adicionales se encuentran en Hamilton (1989, 1996), Filardo (1993, 1994), McCulloch y Tsay (1994a, 1994b), Filardo y Gordon (1998), Kim y Nelson (1999) y Camacho et al. (2012a, 2012b).

Los modelos MS-AR combinan elementos no lineales (saltos discretos entre regímenes, caracterizados mediante una cadena de Markov) y lineales (una estructura autorregresiva, total o parcialmente condicionada al régimen).

² De esta forma, el crecimiento del PIB se espera que exhiba tasas de crecimiento positivas en expansiones y menores, usualmente negativas, en recesiones.

En los modelos MS-AR el comportamiento dinámico de la serie z_t varía en función del régimen o estado en que se encuentre siguiendo, dentro de cada uno de ellos, una evolución lineal de tipo autorregresivo.

$$[1] \quad z_t - \mu(s_t) = \sum_{h=1}^p \phi_h (z_{t-h} - \mu(s_{t-h})) + u_t$$

Donde s_t es una variable de estado binaria e inobservable que define el régimen en que se encuentra el sistema y μ es el valor medio de z_t condicionado a s_t . El operador autorregresivo (AR) $\phi(B)$ se asume estacionario e independiente del régimen³.

Se supone que las innovaciones son gaussianas, de media nula y con varianza dependiente del régimen en que se encuentra la serie:

$$[2] \quad u_t \sim \text{iidN}(0, \sigma_j^2) \quad j = 0,1$$

La evolución de la variable de estado (inobservable) s_t que define el régimen en que se encuentra la serie obedece a una cadena de Markov de primer orden, cuya matriz 2x2 de probabilidades de transición P viene dada por:

$$[3] \quad p_{ij} = \text{prob}\{s_t = i \mid s_{t-1} = j\} \in (0,1) \quad \forall i, j = \{0,1\}$$

De esta manera, los elementos de la diagonal de P cuantifican la probabilidad de continuidad de cada régimen y los que no pertenecen a la misma miden la probabilidad de transición de un régimen a otro.

Por otra parte, las probabilidades de transición permiten la representación de algunas características de los ciclos económicos que no son fáciles de expresar con otros modelos tales como la asimetría, la dependencia de la duración, la interacción entre

³ Versiones más generales de estos modelos consideran operadores AR dependientes del régimen.

cambio de régimen y estacionalidad, etc. Véase Lam (1997), Ghysels (1994) y Filardo (1993, 1994).

La estimación de un modelo MS-AR es complicada debido a la naturaleza no lineal de su representación en el espacio de los estados y, por consiguiente, a las aproximaciones numéricas que ha de realizar el filtro de Kalman en cada una de sus iteraciones, véase Hamilton (1989) y Kim y Nelson (1999) para una exposición detallada⁴.

3 Aplicación: un modelo MS-AR para el PIB de España

A continuación se especifica y estima un modelo MS-AR para la serie de primeras diferencias de la transformación logarítmica del PIB trimestral de España, desde 1980:1 hasta 2016:3:

$$[4] \quad z_t = (1 - B) \ln(\text{pib}_t) = \Delta \ln(\text{pib}_t)$$

La aplicación del operador de primeras diferencias Δ en [4] actúa como un filtro que elimina la tendencia, acentuando al mismo tiempo los elementos más irregulares de la serie. Adicionalmente, la aplicación de Δ a la transformación logarítmica es el equivalente lineal de la tasa intertrimestral de crecimiento.

Se asume que la variable estado s_t indicadora del estado cíclico puede adoptar dos valores: 0 (recesión) y 1 (expansión). Como se verá más adelante, estos valores no se corresponden directamente con crecimientos negativos y positivos del PIB sino que reflejan condiciones subyacentes al estado del ciclo y que afectan a los valores de los parámetros del modelo AR.

⁴ La estimación del modelo MS-AR se ha llevado a cabo con la librería `MS_Regress`, programada en MATLAB, véase Perlin (2015).

Los criterios de información AIC (*Akaike's Information Criterion*) y BIC (*Bayesian Information Criterion*) sugieren $p=4$ como orden apropiado del modelo AR. La estimación del modelo MS-AR(4) por máxima verosimilitud genera los siguientes resultados:

Tabla 1: Estimación del modelo MS-AR: matriz de transición P

	Régimen	S_{t-1}		Autovalores	Probabilidad ergódica	Duración esperada
		0	1			
S_t	0	0.6750	0.0750	1.00	0.18	3.08
	1	0.3250	0.9250	0.60	0.82	13.33

Se aprecia claramente el carácter asimétrico del ciclo, siendo las fases expansivas más probables y duraderas que las recesivas (aproximadamente cuatro veces más). Asimismo, la existencia de una distribución ergódica no uniforme es consistente con la hipótesis de un régimen con dos estados diferenciados. Finalmente, la magnitud del segundo autovalor indica que la velocidad a la que s_t tiende a su estado ergódico se sitúa en un valor intermedio⁵.

La estimación correspondiente a los parámetros AR del modelo se muestra a continuación:

Tabla 2: Estimación del modelo MS-AR: parámetros AR

	Régimen	Conicionados		No condicionados			
		μ	σ	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4
S_t	0	-0.0105	0.7439	0.5157	0.1522	0.3584	-0.2877
	1	0.8041	0.5261				

La estimación del modelo muestra que el régimen 0 (recesión) está centrado en un valor ligeramente negativo (-0.0105) por contraposición al claramente positivo del régimen 1

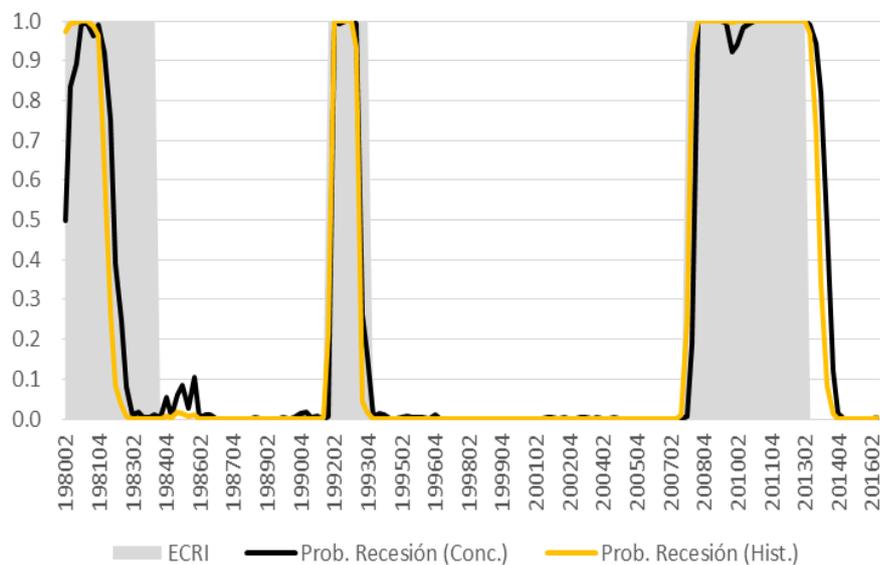
⁵ Una medida de la velocidad de convergencia es $v=1-\lambda_{(2)}$. En esta clase de modelos, $0 \leq \lambda_{(2)} < 1$, de modo que $0 < v \leq 1$. Si $v \rightarrow 0$ (1) la velocidad de convergencia es mínima (máxima), véase Quah (1996). En este modelo, $v=1-0.6=0.4$ indicando que la velocidad de convergencia es moderada de forma que las discrepancias muestrales con respecto a la distribución ergódica pueden ser relativamente persistentes.

(0.8041), siendo asimismo más disperso que el régimen expansivo como indican los valores estimados para las desviaciones típicas.

Las probabilidades de que la serie se encuentre en el régimen 0 en el periodo t pueden calcularse utilizando la información disponible hasta ese momento (estimación concurrente, *update*) o toda la información disponible en la muestra (estimación histórica, *smoothed*). Los resultados de ambas se presentan en el siguiente gráfico, junto con los periodos recesivos fechados por el *Economic Cycle Research Institute*, ECRI⁶ (metodología NBER), sombreados en gris, y la tasa de crecimiento intertrimestral del PIB real.

Los parámetros presentados en las dos tablas anteriores son los que permiten estimar el régimen o estado del modelo. Como ya se ha señalado, esta estimación requiere una adaptación del filtro de Kalman para tener la naturaleza no lineal del modelo, de forma que el régimen subyacente, que no es directamente observable, es estimado.

Figura 1: Probabilidades del régimen 0 (recesión)

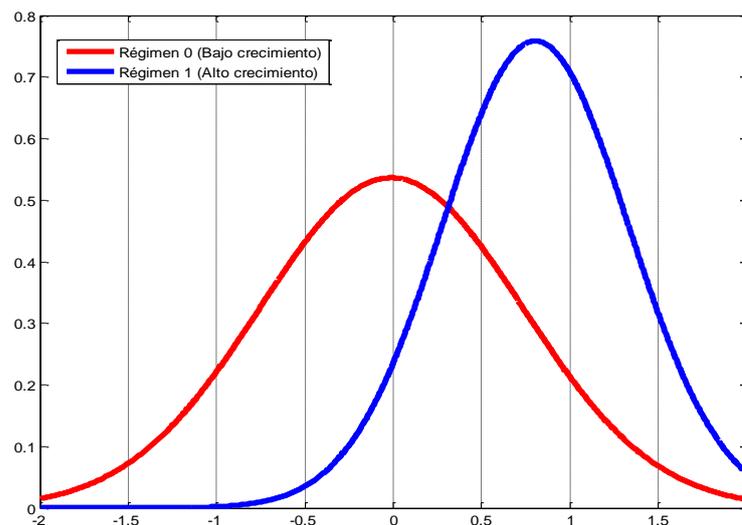


⁶ Véase ECRI: <https://www.businesscycle.com/>

La probabilidad concurrente es ligeramente más irregular que la histórica, debido al uso más limitado del conjunto de información disponible. Esta mayor erraticidad no ha impedido que sus señales de alerta⁷ hayan sido siempre confirmadas por el estimador histórico. En este sentido, el riesgo de falsas señales es reducido.

Asimismo, la estimación del modelo MS-AR permite calcular una distribución (cuyos momentos característicos son los reflejados en la tabla 2) del crecimiento del PIB trimestral condicionada al estado del régimen. Dicha distribución adopta la forma de una mixtura de dos distribuciones gaussianas, como se aprecia en la figura 2:

Figura 2: Distribución condicionada del crecimiento del PIB



Esta mixtura permite contestar a la siguiente pregunta: dada una observación de crecimiento intertrimestral del PIB, ¿a qué régimen pertenece? A tenor de los resultados obtenidos, un valor en torno a +0.31 permite estimar el punto de corte entre ambos

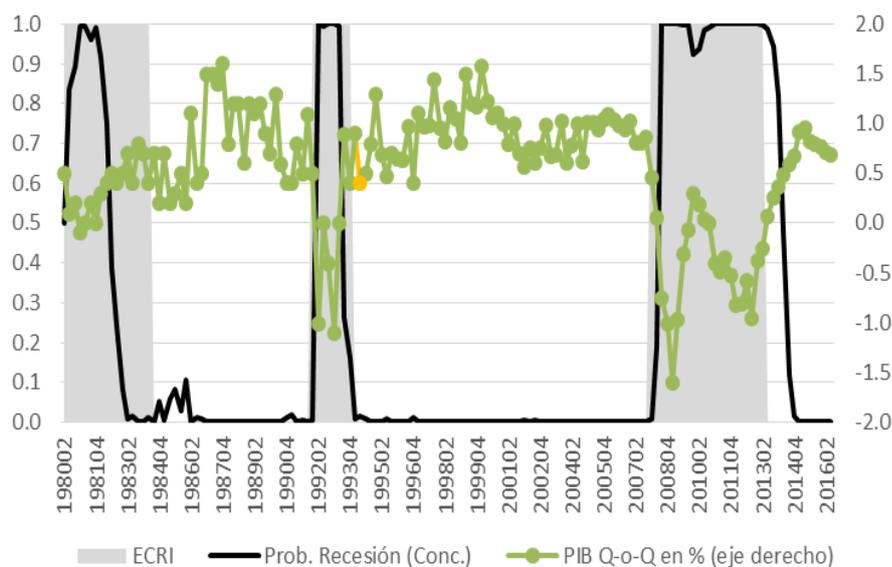
⁷ De forma convencional, se considera señal de alerta una probabilidad igual o superior a 2/3. Análogamente, una probabilidad igual o inferior a 1/3 define un estado sin riesgo para el crecimiento (*green zone*).

estados. No obstante, existe un cierto solapamiento entre ambas distribuciones que aconseja tomar ese punto de corte como una referencia operativa pero no como una división absoluta entre los dos regímenes.

Por otra parte, el rango de valores recesivos no sólo incluye crecimientos negativos sino también los de signo positivo pero de magnitud inferior a 0.31, confirmando que un crecimiento positivo del PIB es una condición necesaria pero no suficiente para definir una expansión. No obstante, esta mixtura también permite caracterizar el régimen de crecimiento bajo como frecuentemente recesivo y el de crecimiento alto como predominantemente expansivo. Asimismo, en términos de volatilidad, el primero es más volátil que el segundo, confirmando la asociación entre periodos de bajo crecimiento y mayor riesgo.

Este hecho puede ser confirmado en la figura 3, donde se representan las probabilidades de recesión, o crecimiento bajo, junto con los periodos recesivos fechados por el ECRI, sombreados en gris, y la tasa de crecimiento intertrimestral del PIB real.

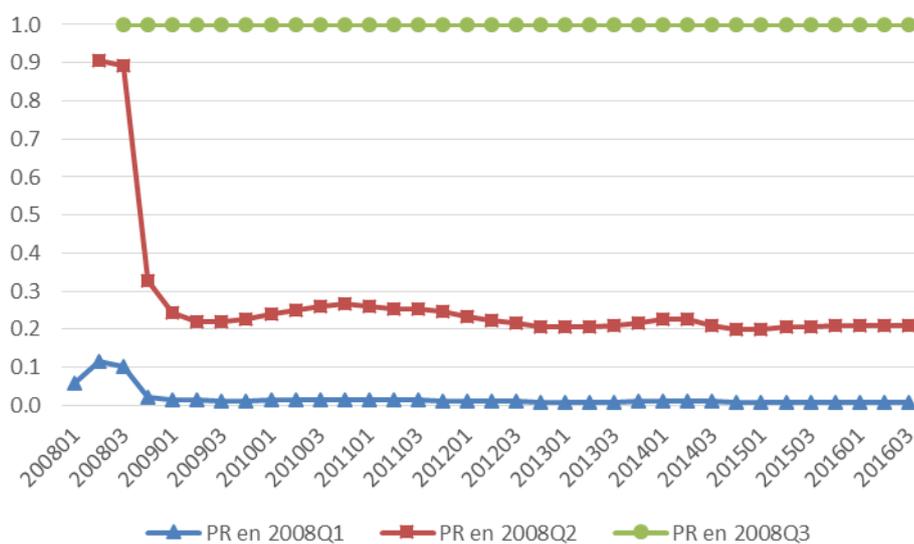
Figura 3: Probabilidades del régimen 0 (crecimiento bajo) y crecimiento del PIB



Por último, se ha llevado a cabo un ejercicio en pseudo-tiempo real (omitiendo las revisiones del PIB y sin utilizar predicciones) para ver cómo se habría diagnosticado la entrada en la última recesión mediante este procedimiento, así como la estabilidad en su diagnóstico. La figura 4 refleja los resultados.

Figura 4: Evolución de las probabilidades del régimen de crecimiento bajo

Periodos: 2008:1, 2008:2 y 2008:3



Se puede observar que existió un aviso, tras conocerse el dato de 2008:1 (+0.45% q-o-q), de que empezaban a ser plausibles ciertas probabilidades de recesión (alrededor del 10%) que, tras publicarse la cifra del PIB de 2008:2 (+0.05% q-o-q) pasaron a elevarse sustancialmente (cerca del 90%), para consolidando el diagnóstico con el dato de crecimiento del tercer trimestre (-0.75% q-o-q), dato que certificaba la entrada plena en una recesión.

Sin entrar en un análisis pormenorizado de la recesión que comenzó en 2008, el resultado anterior indica la brusquedad con la que se inició, viniendo precedida a su vez de un periodo expansivo más largo de lo habitual, en relación a lo que muestra la distribución ergódica.

Atendiendo nuevamente a la figura 3, se pueden asimismo observar episodios de aparente salida de una recesión como la “W” de 2010, en la que se pudo apreciar una reducción de la probabilidad del estado recesivo que, finalmente, revirtió, no produciéndose una salida definitiva hasta finales de 2013.

4 Un contraste: un modelo autorregresivo por umbrales (*Threshold Autoregression, TAR*) para el PIB de España

Los modelos autorregresivos por umbrales (TAR, Threshold Autoregressions) proporcionan una forma relativamente simple de introducir elementos no lineales en el análisis econométrico de series temporales, véase Tsay (1989), Tiao y Tsay (1994), Chen y Langnau (2010), entre otros. En esta sección se especifica y estima un modelo TAR para la serie de crecimientos intertrimestrales del PIB de España, cuyos resultados servirán para contrastar los derivados de modelo MS-AR⁸.

Un modelo TAR de orden p con dos regímenes puede ser representado mediante la siguiente ecuación:

$$[5] \quad z_t = \underbrace{I_t \left(\phi_{0,1} + \sum_{h=1}^{p_1} \phi_{h,1} z_{t-h} \right)}_{\text{Régimen 1: dinámica AR}} + \underbrace{(1 - I_t) \left(\phi_{0,2} + \sum_{h=1}^{p_2} \phi_{h,2} z_{t-h} \right)}_{\text{Régimen 2: dinámica AR}} + u_t$$

Siendo $p = \max(p_1, p_2)$, I_t es una variable binaria que determina el régimen y u_t una innovación de tipo ruido blanco cuya varianza varía también con el régimen:

$$[6] \quad u_t \sim \text{iidN}(0, I_t \sigma_1^2 + (1 - I_t) \sigma_2^2)$$

⁸ Martínez y Espasa (1998) estiman un modelo TAR con tres regímenes para el periodo 1970-1995.

Como se aprecia en la ecuación anterior, la volatilidad de los shocks varía de forma discreta en consonancia con el comportamiento de la variable indicadora I_t .

De esta manera, las ecuaciones [5] y [6] describen un proceso globalmente no lineal, debido a la presencia de la variable binaria I_t que indica el régimen en el que se encuentra la serie, pero que está formado por procesos lineales en cada uno de los tramos asociados a los dos regímenes. De esta manera, cada régimen tiene su propia dinámica lineal caracterizada por un modelo AR.

Finalmente, la determinación del régimen depende del comportamiento pasado de la propia variable que se está modelizando:

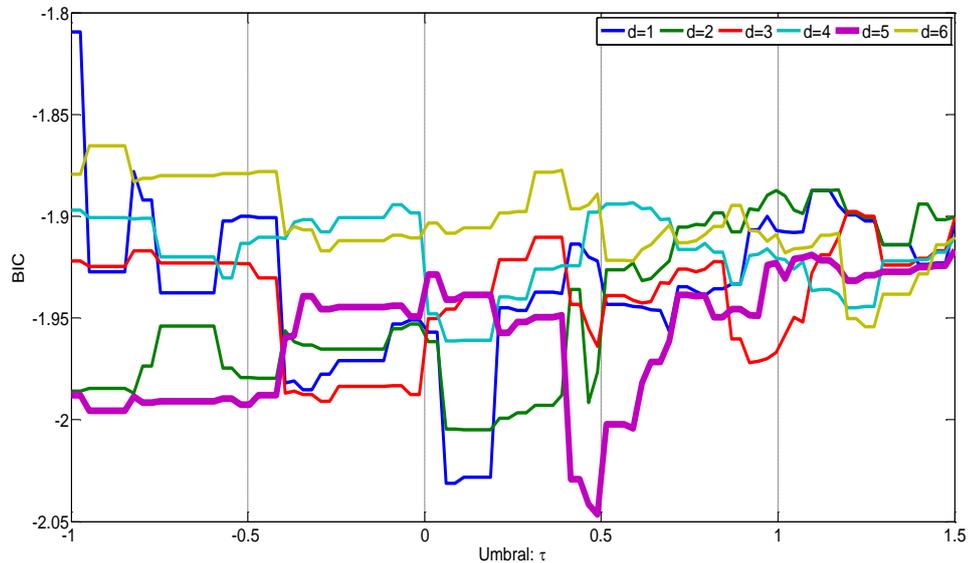
$$[7] \quad I_t = \begin{cases} 1 & z_{t-d} \leq \tau \\ 0 & z_{t-d} > \tau \end{cases}$$

Siendo d el retardo y τ el umbral que determina el cambio de régimen.

Siguiendo a Tsay (1989), el análisis de la función de autorregresión parcial y de los criterios de información AIC (*Akaike's Information Criterion*) y BIC (*Bayesian Information Criterion*) sugieren tomar $p=4$ como valor global para el orden de los modelos autorregresivos de ambos regímenes.

La determinación del retardo de reacción d y del umbral de cambio de régimen τ se ha efectuado evaluando el estadístico BIC en una malla bidimensional con $d=\{1,2,\dots,6\}$ y $\tau \in [-1;1.5]$, véase Chen y Langnau (2010).

Figura 5: Retardo de reacción y umbral de cambio de régimen del modelo TAR



El valor del retardo de reacción d que ofrece de forma consistente los menores valores es $d=5$ y, condicionado este valor para d , el umbral de cambio de régimen que minimiza el criterio BIC es $\tau=0.49$. Este último valor es netamente superior al que discrimina los dos estados según el modelo MS-AR (+0.31).

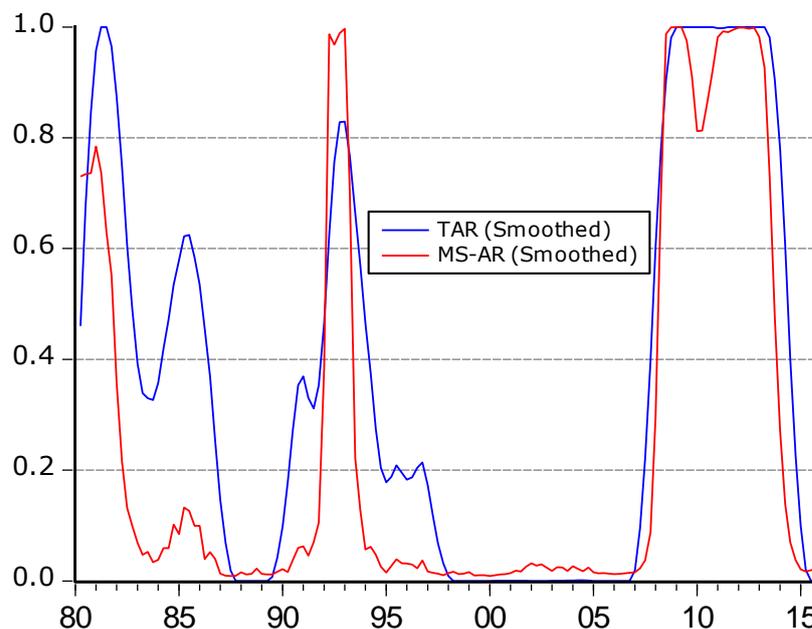
La estimación final del modelo TAR es consistente con una dinámica autorregresiva distinta para los dos regímenes: $p_1=1$ para los periodos de crecimiento bajo y $p_2=4$ para los de crecimiento alto. Los resultados finales de la estimación se muestran en la siguiente tabla⁹:

⁹ La estimación se ha llevado a cabo con el programa SCA, Liu (2009).

Tabla 3: Estimación del modelo TAR

Retardo: d	5							
Umbral: τ	0.49							
Régimen								
	μ	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	σ	n
1	0.1961	0.0518	0.7359				0.3845	53
		0.0530	0.7550					
2	0.7622	0.1122	0.5985	0.3505	0.4651	-0.5613	0.3592	88
		0.0868	0.0939	0.1037	0.1027	0.1023		

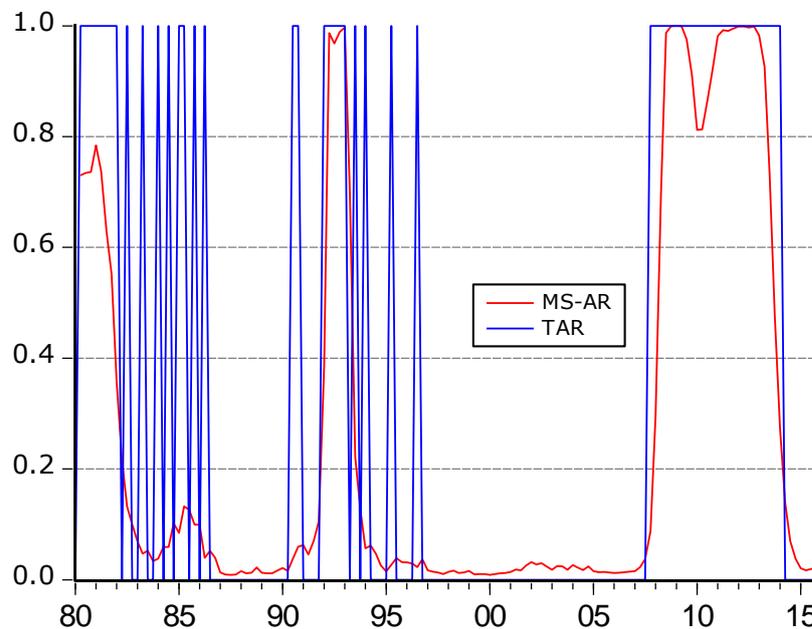
La estimación del modelo permite inferir los regímenes de crecimiento de la serie del PIB, combinando la ecuación [7] con los resultados de la tabla anterior. En el siguiente gráfico se comparan la probabilidad concurrente (*one-sided*) del régimen de crecimiento bajo del modelo MS-AR con la secuencia de I_t compatibles con dicho régimen estimada por el modelo TAR¹⁰.

Figura 6: Estimaciones alternativas del régimen 0 (recesión)


¹⁰ Debido a que la definición de [7] no incorpora elementos de suavizado, ni de forma funcional ni mediante filtros lineales, la secuencia original de I_t es bastante irregular. Por esta razón, en el gráfico se presenta su versión suavizada mediante el filtro de Hodrick-Prescott, con $\lambda=1600$.

La similitud entre ambas estimaciones es muy elevada, lo que sugiere que los elementos de dinámica no lineal recogidos mediante el modelo MS-AR son comunes a otras especificaciones distintas, como la que ofrece el modelo TAR. No obstante, la necesidad de recurrir a filtros *ad hoc* para estabilizar la clasificación de regímenes proporcionada por el modelo TAR, hace más conveniente el uso del modelo MS-AR. Para ilustrar este hecho, la siguiente figura muestra compara la estimación del régimen de bajo crecimiento proporcionada por el modelo MS-AR con la que ofrece el modelo TAR sin suavizado alguno.

Figura 7: Estimaciones alternativas del régimen 0 (recesión)



Resulta evidente la necesidad de añadir elementos que suavicen de alguna forma los resultados proporcionados por el modelo TAR, lo que reduce su atractivo práctico y justifica el uso preferente del modelo MS-AR.

5 Conclusiones

Los modelos no lineales que describen la dinámica del PIB de la economía española pueden ser de utilidad como complemento y extensión del análisis en tiempo real de la situación coyuntural de la economía española, véase Cuevas et al. (2015).

En particular, un modelo MS-AR proporciona una caracterización relativamente sencilla de las fases de crecimiento y de sus probabilidades de ocurrencia así como del umbral que las separa. Esta caracterización es globalmente consistente con la que genera un modelo TAR, de forma que puede considerarse robusta.

Por otra parte, la identificación de las fases cíclicas es afín a la que se deriva utilizando filtros lineales y algoritmos de fechado de puntos de giro, véase Quilis (2012).

Referencias

- Camacho, M., Pérez-Quirós, G. y Poncela, P. (2012a) "Extracting non-linear signals from several economic indicators", Banco de España, Documento de Trabajo n. 1205.
- Camacho, M., Pérez-Quirós, G. y Poncela, P. (2012b) "Markov-Switching dynamic factor models in real time", Banco de España, Documento de Trabajo n. 1205.
- Chen, R. y Langnau, A. (2010) "Turning points detection of business cycles: a model comparison", SSRN, Working Paper.
- Cuevas, A., Pérez-Quirós, G. and Quilis, E.M. (2015) "Integrated model of short-term forecasting of the Spanish economy", AIREF, Working Paper WP 2015/4.
- Filardo, A.J. (1993) "The evolution of U.S. business cycle phases", Federal Reserve Bank of Kansas City, Research Working Paper n. 93-17.
- Filardo, A.J. (1994) "Business-cycle phases and their transitional dynamics", *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 12, n. 3, p. 299-308.
- Filardo, A.J. y Gordon, S.F. (1998) "Business cycle durations", *Journal of Econometrics*, vol. 85, n. 1, p. 99-124.
- Ghysels, E. (1994) "On the periodic structure of the business cycle", *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 12, n. 3, p. 289-298.
- Hamilton, J.D. (1989) "A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle", *Econometrica*, vol. 57, n. 2, p. 357-384.

- Hamilton, J. D. (1996) "Specification testing in Markov-switching time series models," *Journal of Econometrics*, vol. 70, n. 1, p. 127-157.
- Kim, C.J. y Nelson, C.R. (1999) *State-space models with regime-switching: classical and Gibbs-sampling approaches with applications*. MIT Press.
- Lam, P.S. (1997) "A Markov switching model of GNP growth with duration dependence", Federal Reserve Bank of Minneapolis, Discussion Paper n. 124.
- Liu, L.M. (2009) *Time Series Analysis and Forecasting*, Scientific Computing Associates (SCA).
- Martínez, J.M. y Espasa, A. (1998) "Caracterización del PIB español a partir de modelos univariantes no lineales", *Revista Española de Economía*, vol. 15, n 3, p. 325-354.
- McCulloch, R.E. y Tsay, R.S. (1994a) "Bayesian analysis of autoregressive time series via the Gibbs sampler", *Journal of Time Series Analysis*, vol. 15, n. 2, p. 235-250.
- McCulloch y Tsay, R.S. (1994b) "Statistical analysis of economic time series via Markov switching models", *Journal of Time Series Analysis*, vol. 15, n. 5, p. 523-539.
- Perlin, M. (2015) "MS_Regress: The MATLAB package for Markov regime switching models", MATLAB Central File Exchange.
- Quah, D.T. (1996) "Empirics for economic growth and convergence", *European Economic Review*, n. 40, p. 1353-1375.
- Quilis, E.M. (2012) "Identificación de puntos de giro: aplicación al PIB de España", *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, vol. 28, n. 2, p. 132-154.
- Tiao, G.C. y Tsay, R.S. (1994) "Some advances in non-linear and adaptive modelling in time series", *Journal of Forecasting*, 13, 109-131.
- Tsay, R.S. (1989) "Testing and modelling threshold autoregressive processes", *Journal of the American Statistical Association*, vol. 84, p. 231-240.